KỸ THUẬT LIÊN HỢP - CÔNG PHÁ MÔN TOÁN 2016
(Bản full)

NGUYỄN TIẾN CHINH

KỸ THUẬT NHÂN LƯỢNG LIÊN HỢP

— Dự đoán nghiệm $x = x_o$ bằng máy tính bỏ túi $(\mathrm{SHIFT - SOLVE\ \ hay\ \ ALPHA - CALC})$.

— Tách, ghép phù hợp để sau khi nhân liên hợp xuất hiện nhân tử chung $(x - x_o)$ hoặc bội của $(x - x_o)$ trong phương trình nhằm đưa về phương trình tích số: $(x - x_o).g(x) = 0$.

— Các công thức thường dùng trong nhân liên hợp

Biểu thức	***Biểu thức liên hiệp***	***Tích***
$\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$	$\sqrt{A} \mp \sqrt{B}$	$A - B$
$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A^2} - \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}$	$A + B$
$\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}$	$A - B$

Chú ý :

- Khi dùng nhân liên hợp các em chú ý về bậc của x trong biểu thức cần liên hợp,bậc cao - bậc thấp hơn nhé
- Điểm nhấn của phương pháp liên hợp đó là biểu thức còn lại trong móc vuông luôn dương - hoặc luôn âm khi đó ta làm thế nào để chứng minh điều đó hoặc viết như thế nào để thể hiện được điều này(có thể dùng Đạo hàm - đánh giá)

<u>Kĩ Thuật 1</u>

(bài toán chứa hai căn): $\sqrt{A}, \sqrt{B}$ lấy A - B xem có xuất hiện nhân tử chung hay không:

BT Mẫu 1: Giải bất Phương trình $\sqrt{x+1} + 1 = 4x^2 + \sqrt{3x} \quad (*)$

Đề thi thử Đại học lần 1 khối D năm 2013 – Trường THPT Lê Xoay

<u>Nhận xét</u>:

Sử dụng máy tính, ta tìm được một nghiệm là $x = \dfrac{1}{2}$,vậy ta đoán nhân tử chung sẽ là x - ½ hoặc 2x -1 và ta có: $\begin{cases} (3x) - (x+1) = 2x - 1 \\ 4x^2 - 1 = (2x-1)(2x+1) \end{cases}$ nên ta có lời giải sau:

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $x \geq 0$.

$$(*) \Leftrightarrow (4x^2 - 1) + (\sqrt{3x} - \sqrt{x+1}) = 0 \quad \Leftrightarrow (2x-1)(2x+1) + \frac{(\sqrt{3x} - \sqrt{x+1})(\sqrt{3x} + \sqrt{x+1})}{\sqrt{3x} + \sqrt{x+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(2x+1) + \frac{(2x-1)}{\sqrt{3x} + \sqrt{x+1}} = 0 \quad \Leftrightarrow (2x-1)\left[2x + 1 + \frac{1}{\sqrt{3x} + \sqrt{x+1}}\right] = 0 \quad (1)$$

- Ta có: $\forall x \ge 0 \Rightarrow 2x+1+\dfrac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}} > 0$ nên $(1) \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}$.

BT Mẫu 2: Giải bất Phương trình: $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}=2x-6 \qquad (*)$

Đề thi Đại học khối A năm 2007

Nhẩm được nghiệm x = 3 ta đoán rằng x - 3 la nhân tử chung

Nhận thấy rằng: $\begin{cases}(2x-3)-x=x-3\\2x-6=2(x-3)\end{cases}$ nên ta có lời giải sau:

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $x \ge \dfrac{3}{2}$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{x-3}{\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}\right)}-2(x-3)=0 \qquad \Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}=2 \quad (1)\end{array}\right.$$

$$x \ge \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{2x-3}+\sqrt{x} \ge \sqrt{\frac{3}{2}} > 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}} < 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}=2 \ (VN).$$

- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

BT Mẫu 3: Giải bất Phương trình $\sqrt{10x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{9x+4}+\sqrt{2x-2} \qquad (*)$

Đề dự bị Đại học khối B năm 2008

Nhẩm được x = 3 là nghiệm nên đoán rằng x - 3 là nhân tử chung

Nhận thấy: $(10x+1)-(9x+4)=(3x-5)-(2x-2)=x-3$ nên ta có lời giải sau:

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $x \ge \dfrac{5}{3}$.

$$(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{10x+1}-\sqrt{9x+4}\right)+\left(\sqrt{3x-5}-\sqrt{2x-2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{10x+1-(9x+4)}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\frac{3x-5-(2x-2)}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\frac{1}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}\right)=0$$

Vì $\forall\, x \ge \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\frac{1}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}} > 0$ nên $(1) \Leftrightarrow x = 3$.

- So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.:

BT Mẫu 4: Giải bất Phương trình $\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3(x^2-x-1)}-\sqrt{x^2-3x+4}\quad (*)$

Đề thi học sinh giỏi tỉnh Lâm Đồng năm 2008

Nhẩm được nghiệm là x = 2 nên suy đoán rằng nhân tử chung sẽ là x - 2

Nhận thấy $\begin{cases}(3x^2-5x+1)-(3x^2-3x-3)=-2(x-2)\\(x^2-2)-(x^2-3x+4)=3(x-2)\end{cases}$. Nên ta có lời giải sau:

<u>Bài giải tham khảo</u>

$$(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{3x^2-3x-3}\right)-\left(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-3x+4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x+4}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3x^2-3x-3}}-\frac{3x-6}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{-2}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3x^2-3x-3}}-\frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ \frac{2}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3x^2-3x-3}}+\frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}=0\quad (1)\end{array}\right.$$

- Ta có: $\frac{2}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3x^2-3x-3}}+\frac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}} > 0,\ \forall x$ xác định.
- Thay $x = 2$ vào phương trình $(*) \Rightarrow (*)$ thỏa. Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

BT Mẫu 5:Giải bất phương trình: $\sqrt{10x+1}+\sqrt{3x-5}\ge\sqrt{9x+4}+\sqrt{2x-2}$ (Đề dự bị khối B năm 2008)

Phân tích: 10x + 1 - (9x +4) = 3x - 5 - (2x - 2) = x - 3 nên ta có lời giải sau:

ĐK: $x \ge \frac{5}{3}$ lúc đó BPT

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{10x+1}-\sqrt{9x+4}\right)+\left(\sqrt{3x-5}-\sqrt{2x-2}\right)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\frac{x-3}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x+2}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{1}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\frac{1}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}\right]\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 3$$

Vì : $\Leftrightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\frac{1}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}\right]>0 \forall x>\frac{5}{3}$

So sánh với điều kiện ta có S = $[3;+\infty)$

BT Mẫu 6 Giải Phương trình: $9\left(\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}\right)=x+3$ (Đề HSG HN - 2010)

Phân tích: (4x + 1) - (3x - 2) = x + 3 ta có lời giải

ĐK: $x\ge\frac{2}{3}$ Phương trình đã cho tương đương:

$$9\left(\frac{x+3}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}}\right)=x+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3(L) \\ \sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}=9(*) \end{array}\right.$$

Bình phương hai vế (*) ta có $7x-1+2\sqrt{(4x+1)(3x-2)}=81 \Leftrightarrow 2\sqrt{(4x+1)(3x-2)}=82-7x$

$$\begin{cases} x\le\frac{82}{7} \\ 4(4x+1)(3x-2)=(82-7x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=6 \text{ (TMĐK)}$$

BT Mẫu 7: Giải Phương trình sau: $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+1}=2x^2-x-3$

Phân tích : $\begin{cases} (3x-2)-(x+1)=2x-3 \\ 2x^2-x-3=(2x-3)(x+1) \end{cases}$

Lời giải : Đk $x\ge 2/3$ .Pt

$\Leftrightarrow \frac{2x-3}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}}=(2x-3)(x+1) \Leftrightarrow (2x-3)\left[\frac{1}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}}-(x+1)\right]=0$

$\Leftrightarrow x=3/2$ hoặc $\frac{1}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+1}}=(x+1)$ (Vô nghiệm vì VT<1,VP>1)

Kĩ thuật 2: Thay trực tiếp nghiệm vào trong căn để tìm lượng liên hợp

Nếu phương trình có 1 nghiệm mà đó là nghiệm nguyên - thay nghiệm đó vào trong căn ta được số a nào đó vậy ghép $\sqrt{\ } - a$ làm một cặp liên hợp

BT Mẫu 8:Giải phương trình: $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2x^2-5x-1 \quad (*)$

✍ **Nhận xét**: Nhẩm thấy x = 3 là nghiệm pt, thay x = 3 lần lượt vào hai căn ta thu được hai số giống nhau a = 1

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $2\le x\le 4$.

$$(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}-1\right)+\left(\sqrt{4-x}-1\right)-\left(2x^2-5x-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{3-x}{\sqrt{4-x}+1}-(x-3)(2x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\frac{1}{\sqrt{4-x}+1}-2x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1}=2x+1 \quad (1) \end{array}\right.$$

- Xét hàm số $f(x)=2x+1$ trên $x\in[2;4]$ thấy $f(x)=2x+1\ge 5 \quad (2)$
- Xét hàm số $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1}$ trên $x\in[2;4]$.

$$g'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x-2}+1\right)}-\frac{1}{2\sqrt{4-x}\left(\sqrt{4-x}+1\right)}<0,\ \forall x\in[2;4].$$

$\Rightarrow g(x)$ nghịch biến và $\max\limits_{[2;4]} g(x)=g(2)=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} \quad (3)$

- Từ $(2),(3)\Rightarrow 2$ hàm số $f(x),\ g(x)$ có đồ thị không thể cắt nhau. Do đó (1) vô nghiệm.
- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

BT Mẫu 9:Giải phương trình: $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0 \quad (*)$

Đề thi Đại học khối B năm 2010

<u>Bài giải tham khảo</u>

✍ **<u>Nhận xét</u>:**

Nhận thấy phương trình có 1 nghiệm $x=5$ $(\text{SHIFT}-\text{SOLVE hay ALPHA}-\text{CALC})$, trong khoảng điều kiện: $x\in\left[-\dfrac{1}{3};6\right]$. Do đó, ta cần phải tách ghép để nhân liên hiệp sao cho xuất hiện nhân tử chung $(x-5)$ hoặc bội của nó.Thay x = 5 vào căn thứ nhất được 4,căn thứ 2 được 1

Nên ta có lời giải sau:

- Điều kiện: $-\dfrac{1}{3}\le x\le 6$.

$$(*)\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x+1}-4\right)+\left(1-\sqrt{6-x}\right)+3x^2-14x-5=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}}+(3x+1)(x-5)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1\right)=0 \quad (1)$$

- Ta có $\forall x \in \left[-\frac{1}{3};6\right] \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+3x+1>0$. Do đó $(1) \Leftrightarrow x=5$.

- So với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

BT Mẫu 10:Giải phương trình: $2x^2-11x+21=3\sqrt[3]{4x-4} \quad (*)$

Nhận xét:

Nhận thấy phương trình có 1 nghiệm $x=3$ $(\text{SHIFT}-\text{SOLVE hay ALPHA}-\text{CALC})$, do đó, ta cần phải tách ghép để sau khi nhân liên hiệp sao cho xuất hiện nhân tử chung $(x-3)$ hoặc bội của nó.thay x = 3 vào căn ta được 2 vậy phải ghép căn với 2 để được biểu thức liên hợp

$$(*) \Leftrightarrow 3\left(\sqrt[3]{4x-4}-2\right)-\left(2x^2-11x+15\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(4x-4-8)}{\sqrt[3]{(4x-4)^2}+2\sqrt[3]{4x-4}+4}-(2x-5)(x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{12}{\sqrt[3]{(4x-4)^2}+2\sqrt[3]{4x-4}+4}-(2x-5)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ 2x-5-\dfrac{12}{\sqrt[3]{(4x-4)^2}+2\sqrt[3]{4x-4}+4}=0 \quad (1) \end{array}\right.$$

- Với $x>3 \Rightarrow 2x-5>1$, đặt $t=\sqrt[3]{4x-4}>2 \Rightarrow t^2+2t+4>12$

$\Rightarrow \frac{12}{t^2+2t+4}<1$ tức là (2) vô nghiệm.

- Với $x<3 \Leftrightarrow 2x-5<1$, đặt $t=\sqrt[3]{4x-4}<2 \Rightarrow 0<t^2+2t+4>12$

$\Rightarrow \frac{12}{t^2+2t+4}>1$ tức là (2) vô nghiệm.

- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

BT Mẫu 11: Giải Phương trình: $\sqrt{x^2-x+3}+\sqrt{x^2+x+4}=7(x>0)$

Nhẩm được x = 3 là nghiệm của phương trình,thay vào ;lkmczb $\sqrt{x^2-x+3}=3, \sqrt{x^2+x+4}=4$

Ta có bài giải như sau:

$$\sqrt{x^2-x+3}-3+\sqrt{x^2+x+4}-4=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-6}{\sqrt{x^2-x+3}+3}+\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x^2+x+4}+4}=0$$

$$\frac{(x-3)(x+2)}{\sqrt{x^2-x+3}+3}+\frac{(x-3)(x+4)}{\sqrt{x^2+x+4}+4}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x+3}+3}+\frac{x+4}{\sqrt{x^2+x+4}+4}=0(VN) \end{array}\right.$$

Vì $$\frac{x+2}{\sqrt{x^2-x+3}+3}+\frac{x+4}{\sqrt{x^2+x+4}+4}>0 \forall x>0$$

BT Mẫu 12: Giải Phương trình $\sqrt{5x-1}+\sqrt[3]{9-x}=2x^2+3x-1$ (HSG Hà Nội - 2012)

Phân tích : Dùng casio ta biết phương trình có một nghiệm duy nhất x = 1,thây vào $\sqrt{5x-1}=2vs\sqrt[3]{9-x}=2$ nên ta có lời giải như sau :

ĐK : x $\geq \frac{1}{5}$ viết lại phương trình về dạng

$$(\sqrt{5x-1}-2)+\left(\sqrt[3]{9-x}-2\right)=2x^2+3x-5 \Leftrightarrow \frac{5(x-1)}{\sqrt{5x-1}+2}+\frac{1-x}{\sqrt[3]{(9-x)^2}+2\sqrt[3]{9-x}+4}=(x-1)(2x+5)$$

$$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ \frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}=\frac{1}{\sqrt[3]{(9-x)^2}+2\sqrt[3]{9-x}+4}+(2x+5)(*) \end{array}\right.$$ Pt (*) vô nghiệm vì VP $\geq$ 5,VT < 5/2

BT Mẫu 13 :Giải Phương trình $\sqrt{6x+1}-\sqrt{2x+1}=2$ (ĐH 2000D)

Phân tích: ta nhẩm được nghiệm của phương trình là x = 4 đem thay vào $\sqrt{6x+1}=5;\sqrt{2x+1}=3$ ta viết lại phương trình ở dạng như sau:

ĐK:x $\geq -\frac{1}{2}$ Viết lại phương trình:

$$\sqrt{6x-1}-5-\sqrt{2x+1}+3=0 \Leftrightarrow \frac{6(x-4)}{\sqrt{6x+1}+5}-\frac{2(x-4)}{\sqrt{2x+1}+3}=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=4 \\ \frac{3}{\sqrt{6x+1}+5}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}+3}(*) \end{array}\right.$$

Nhận xét: $3\sqrt{2x+1}=\sqrt{18x+9}>\sqrt{6x+1} \Leftrightarrow 3\sqrt{2x+1}+9>\sqrt{6x+1}+5$ vậy (*) vô nghiệm

PT đã cho có nghiệm duy nhất x = 4

BT Mẫu 14 :Giải Phương trình $x^3+3x^2-3\sqrt[3]{3x+5}=1-3x$

Viết lại phương trình: $(x+1)^3=3\sqrt[3]{3x+5}+2$

Nhẩm được x = 1 là một nghiệm của phương trình,thay vào căn ta được 2 do đó ta viết lại pt như sau:

$$(x+1)^3-8=3\sqrt[3]{3x+5}-6\Leftrightarrow(x-1)\left[(x+1)^2+2(x+1)+4\right]=\frac{9(x-1)}{\sqrt[3]{(3x+5)^2}+2\sqrt[3]{3x+5}+4}$$

$$\left[\begin{array}{l}x-1=0\\ \left[(x+2)^2+3\right]=\dfrac{9}{\left[(\sqrt[3]{3x+5}+1)^2+3\right]}\Leftrightarrow\left[(x+2)^2+3\right]\left[\left(\sqrt[3]{3x+5}+1\right)^2+3\right]=9\end{array}\right.$$

Lại có: $\left[(x+2)^2+3\right]\left[\left(\sqrt[3]{3x+5}+1\right)^2+3\right]\ge 9$ dấu "=" chỉ xảy ra khi $\begin{cases}x+2=0\\ \sqrt[3]{3x+5}+1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-2$

Vậy x = 1 hoặc x = -2 là nghiệm của phương trình

BT Mẫu 15 :Giải Phương trình $(x+2)\left(\sqrt{x^2+4x+7}+1\right)+x\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)=0$

Nhận xét: ĐK để phương trình có nghiệm là (2 + x)x $\le 0\Leftrightarrow -2\le x\le 0$,phương trình có một nghiệm là x = -1,từ đây ta viết lại phương trình đã cho như sau:

$$(x+2)\left((\sqrt{x^2+4x+7}-2)+3\right)+x\left((\sqrt{x^2+3}-2)+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(x+2)\left[\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x^2+4x+7}+2}\right]+x\left[\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+3}+2}\right]+6(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow(x+1)\left[\frac{(x+2)(x+3)}{\sqrt{x^2+4x+7}+2}+\frac{x(x-1)}{\sqrt{x^2+3}+2}+6\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ \dfrac{x^2+5x+6}{\sqrt{x^2+4x+7}+2}+\dfrac{x(x-1)}{\sqrt{x^2+3}+2}+6=0(*)\end{array}\right.$$

PT (*) vô nghiệm vì:

$$(*)\Leftrightarrow\frac{x^2+5x+8+\sqrt{x^2+4x+7}}{\sqrt{x^2+4x+7}+2}+\frac{x^2-x+2+\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}+2}>0\forall x$$

Kỹ Thuật 3 - Hệ số bất Định

Kiểu 1: Dùng hệ số bất định cho hai vế khi không nhẩm được nghiệm

BT Mẫu 16: phương trình: $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3}=x^2+1\quad(*)$

Bài giải tham khảo

Cách giải 1. Nhân lượng liên hợp

- Vì $x=-1$ không là nghiệm phương trình nên

$$(*)\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x+3}=\frac{x^2+1}{x+1}\qquad\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x+3}-(x-1)=\frac{x^2+1}{x+1}-(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\left(\sqrt{x^2-2x+3}+x-1\right)}=\frac{2}{x+1} \qquad \Leftrightarrow \left(x^2-2x-1\right)=0$$

.● Vậy nghiệm của phương trình là $x=1\pm\sqrt{2}$.

✪ **Nhận xét:**

Vấn đề đặt ra là làm sao tôi nhận ra được nhân tử chung là $\left(x^2-2x-1\right)$ để điền số $x-1$ vào hai vế ???

Ý tưởng xuất phát từ việc tìm số α sao cho

$$\sqrt{x^2-2x+3}-\left(\alpha x+\beta\right)=\frac{x^2+1}{x+1}-\left(\alpha x+\beta\right),\ \left(\alpha>0\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x+3-(\alpha x+\beta)^2}{\sqrt{x^2-2x+3}+\alpha x+\beta}=\frac{x^2+1-(\alpha x+\beta)\left(x+1\right)}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-\alpha^2)x^2-2(1+\alpha\beta)x+\left(3-\beta^2\right)}{\sqrt{x^2-2x+3}+\alpha}=\frac{(1-\alpha\ )x^2-(\alpha+\beta)x+\left(1-\beta\right)}{x+1}.$$

Đến đây, ta chỉ việc xác định α,β sao cho

$$\begin{cases}1-\alpha^2=1-\alpha\\ 2+2\alpha\beta=\alpha+\beta\Leftrightarrow\alpha=1,\beta=-1.\\ 3-\beta^2=1-\beta\end{cases}$$

BT Mẫu17 Giải phương trình: $\left(3x+1\right)\sqrt{x^2+3}=3x^2+2x+3 \quad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

Do $x=-\frac{1}{3}$ không là nghiệm phương trình, nên với $x\neq-\frac{1}{3}$, ta được:

$$\left(*\right)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+3}=\frac{3x^2+2x+3}{3x+1} \qquad \Leftrightarrow\sqrt{x^2+3}-2x=\frac{3x^2+2x+3}{3x+1}-2x$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2+3-4x^2}{\sqrt{x^2+3}+2x}=\frac{3x^2+2x+3-6x^2-2x}{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3\left(1-x^2\right)}{\sqrt{x^2+3}+2x}=\frac{-3x^2+3}{3x+1} \qquad \Leftrightarrow\frac{3\left(1-x^2\right)}{\sqrt{x^2+3}+2x}=\frac{3\left(1-x^2\right)}{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(1-x^2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+3}+2x}-\frac{1}{3x+1}\right)=0 \qquad \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}+2x}=\dfrac{1}{3x+1} \quad \left(1\right)\end{array}\right.$$

$$\left(1\right)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+3}+2x=3x+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x^2+3=x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

- Vậy phương trình có hai nghiệm $x=\pm 1$.

Nhận xét:

Cách 1.Để đặt được số $-2x$ vào hai vế, ta xét dạng tổng quát

$\sqrt{x^2+3}-(\alpha x+\beta)=\dfrac{3x^2+2x+3}{3x+1}-(\alpha x+\beta)$ và sau đó sử dụng đồng nhất để tìm hai thực $\alpha,\ \beta$ sao cho xuất hiện nhân tử chung.giống bài trên

Cách 2.thay x = 1 vào $\sqrt{x^2+3}$ = 2 = 2x (vì x = 1) là nghiệm

BT Mẫu18: Giải phương trình: $2x^2(x-1)+x=(x-1)\sqrt{2x(x^2-x+2)}+6(*)$

ĐK: $x\ge 0$,thấy x = 1 không là nghiệm của phương trình nên ta viết lại phương trình:

$$\frac{2x^3-2x^2+x-6}{x-1}=\sqrt{2x^3-2x^2+4x} \Leftrightarrow \frac{2x^3-2x^2+x-6}{x-1}-(x+2)=\sqrt{2x^3-2x^2+4x}-(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3-3x^2-4}{x-1}=\frac{2x^3-3x^2-4}{\sqrt{2x^3-2x^2+4x}+(x+2)} \Leftrightarrow (2x^3-3x^2-4)\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\sqrt{2x^3-2x^2+4x}+x+2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^3-3x^2-4=0 \Leftrightarrow x=2 \\ \sqrt{2x^3-2x^2+4x}+x+2=x-1 (VN) \end{array}\right.$$ Vậy x = 2 là nghiệm duy nhất của pt

BT Mẫu 19: Giải phương trình : $x^2(x+6)=(5x-1)\sqrt{x^3+3}+2x-3(*)$

ĐK: $x\ge -\sqrt[3]{3}$ ta thấy x = 1/5 không là nghiệm phương trình

PT (*) $\dfrac{x^3+6x^2-2x+3}{5x-1}=\sqrt{x^3+3} \Leftrightarrow \dfrac{x^3+6x^2-2x+3}{5x-1}-2x=\sqrt{x^3+3}-2x$

(Việc tìm ra -2x là dùng hệ số bất định đã trình bày ở trên nhé)

$\Leftrightarrow \dfrac{x^3-4x^2+3}{5x-1}=\dfrac{x^3-4x^2+3}{\sqrt{x^3+3}+2x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-4x^2+3=0 \\ \sqrt{x^3+3}=3x-1 \end{array}\right.$ x=1 $\vee x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\vee x=4+3\sqrt{2}$

BT Mẫu 20: Giải phương trình $(x^2+3)\sqrt{x^2-x+1}=x^3+3x^2-4x+1$ (*)

Viết lại pt (*) như sau: $\sqrt{x^2-x+1}=\dfrac{x^3+3x^2-4x+1}{x^2+3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1}=x+3-\dfrac{7x+8}{x^2+3}$

$$\sqrt{x^2-x+1}-(x+3)=-\frac{7x+8}{x^2+3} \Leftrightarrow \frac{-7x-8}{\sqrt{x^2-x+1}+x+3}=\frac{-7x-8}{x^2+3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -8/7 \\ \sqrt{x^2 - x + 1} = x^2 - x \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{5}}}{2} \end{array}\right.$$

Kỹ Thuật 3:Đoán nhân tử chung nhờ máy tính (dành cho pt có nghiệm vô tỷ)

Nếu thấy phương trình có hai nghiệm nhưng đều lẻ ta tính tổng hai nghiệm và tích hai nghiệm xem có đẹp không,nếu đẹp thì pt có nhân tử chung sẽ là $x^2 - Sx + p$ vấn đề làm thế nào tìm ra được biểu thức liên hợp:

Giả sử 2 nghiệm là x_1, x_2 ,biểu thức liên hợp cần tìm là ax + b

+ Thay x_1 vào căn được kết quả là C,thay x_2 vào căn ta được kết quả là D

+Giải hệ phương trình $\begin{cases} a.x_1 + b = C \\ a.x_2 + b = D \end{cases} \Rightarrow a, b$ vậy là xong các em đã có biểu thức liên hợp

BT Mẫu 21:Giải phương trình sau: $x^3 - 3x + 1 = \sqrt{8 - 3x^2}$

Giải:

ĐK: $x^3 - 3x + 1 \geq 0$

Dùng máy tính dò nghiệm ta được 2 nghiệm lần lượt là $\begin{array}{l} x_1 = 1,618033989 \\ x_2 = -0,6180339887 \end{array}$

Tổng hai nghiệm này bằng 1,tích bằng -1 nên dự đoán nhân tử chung là $x^2 - x - 1$

thay hai nghiệm vào căn trong phương trình, ta có C = 0,381966;D = 2,618033989

Giải hệ $\begin{cases} a.x_1 + b = C \\ a.x_2 + b = D \end{cases} \Rightarrow a, b$ **ta có a = -1,b = 2 vậy biể thức liên hợp sẽ là 2 - x**

Ta viết lại pt như sau: $(x^3 - 3x + 1) - (2 - x) = \sqrt{8 - 3x^2} - (2 - x) \Leftrightarrow x^3 - 2x - 1 = \dfrac{-4(x^2 - x - 1)}{\sqrt{8 - 3x^2} + 2 - x}$

$\Leftrightarrow (x^2 - x - 1)\left(x - 1 + \dfrac{4}{\sqrt{8 - 3x^2} + 2 - x}\right) = 0$ **đến đây các em tự giải tiếp nhé bài toán chỉ có hai nghiệm**

Ví dụ tiếp nhé : $x^2 + x - 1 = (x + 2)\sqrt{x^2 - 2x + 2}$

ĐK : $(x^2 + x - 1)(x + 2) \geq 0$ **Dùng máy tình nhẩm được hai nghiệm là** $x_1 = 1 - 2\sqrt{2}, x_2 = 1 + 2\sqrt{2}$ **,thay hai ngiệm vào căn ta được cùng một số là C = D = 3(dự đoán biểu thức liên hợp là số 3)**

Có tổng bằng 2 và tích là -7 ta dự đoán pt có nhân tử chung là $(x^2 - 2x - 7)$

Tìm biểu thức liên hợp bằng cách giải hệ sau ngoài nháp nhé

$\begin{cases} a.x_1+b=C \\ a.x_2+b=D \end{cases} \Rightarrow a,b$ **giải ra có a = 0,b=3 tới đây đã rõ rồi nhé biểu thức liên hợp là số 3 thôi - làm thôi các em** $pt \Leftrightarrow x^2+x-1-3(x+2)=(x+2)(\sqrt{x^2-2x+2}-3)$

$$x^2-2x-7-(x+2)\frac{x^2-2x-7}{\sqrt{x^2-2x+2}+3}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x-7)\left[1-\frac{x+2}{\sqrt{x^2-2x+2}+3}\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-7=0 \\ \sqrt{x^2-2x+2}=x-1 \end{array}\right.$$

tới đây các em tự giải tiếp nhé,pt chỉ có hai nghiệm ở trên

Kỹ thuật 4 : Nếu phương trình có hai nghiệm và đều nguyên để tìm lượng liên hợp ta làm như sau

Giả sư lượng liên hợp là ax + b muốn tìm a,b ta thay lần lượt hai nghiệm vào pt : ax + b = $\sqrt{\ }$ giải tìm a,b.............

Ngoài các kỹ thuật chính đã nêu ở trên các em có thể làm theo một thủ thuật khác nếu tìm thấy có nghiệm vô tỷ trong phương trình

BT Mẫu 22 :Trong pt sau khi dùng máy tính ta được x = 1,390388203

Nếu trong phương trình có chứa hai căn,thay lần lượt vào mỗi căn đó ta có kết quả như sau :

$$\begin{cases} \sqrt{5x^2-5x+3} \approx 2,390388203 \approx x+1 \\ \sqrt{7x-2} \approx 2,780776406 \approx 2x \end{cases}$$

vậy x + 1 là lượng cần liên hợp vớ căn thứ nhất,2x là lượng liên hợp với căn thứ 2

Áp Dụng :Giải phương trình sau : $\sqrt{5x^2-5x+3}-\sqrt{7x-2}+4x^2-6x+1=0$

Ví dụ :Dùng máy tính thu được nghiệm là x =4,236067977 ,Nếu phương trình có chứa hai căn ta đem thay hai nghiệm đó lần lượt vào căn $\begin{cases} \sqrt{x-\sqrt{2x+2}}=1 \\ \sqrt{2(3x+1)} \approx 5,236067977 \end{cases}$

Vậy căn thứ nhất trừ đi cho 1 còn 5,236067977 = x + 1 nên căn thứ 2 sẽ trừ đi cho x + 1

Áp Dụng :Giải phương trình sau $x^2+\sqrt{x-\sqrt{2x+2}}=3x+1+\sqrt{2(3x+1)}$

$$x^3+4x^2+x+3=2x^2\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+13}$$

$$15x^2=x+2\sqrt{x^2+x+1}+5$$

$$x^3+x^2=(x^2+1)\sqrt{x+1}+1$$

Bài tập vần dụng :

$1.x^3+3x^2-3\sqrt[3]{3x+5}=1-3x$(DS:x=-2,x=1)

$2;\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0(DS:x=1;x=2-\sqrt{2})$

$3;\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{4x^2+x+1}\right)\left(\sqrt{5x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}\right)=3x^2(x=0;x=1)$

$4;(x+3)\sqrt{x^2+x+2}=x^2+3x+4$

$5;3\left(2+\sqrt{x-2}\right)=2x+\sqrt{x+6}(x=3,x=\frac{11-3\sqrt{5}}{2})$

$6;9\left(\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}\right)=x+3$

$7;\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}-2x^2+7x+2=0(x=4)$

$8;\sqrt[3]{x+24}+\sqrt{12-x}=6\left(x=-24,x=-88\right)$

$9.\sqrt[3]{x^2+4}=\sqrt{x-1}+2x-3\left(x=2\right)$

$10.2\sqrt[3]{3x-2}+3-\sqrt{6-5x}-8=0\left(x=-2\right)$

$11.x^2-3x-4=\sqrt{x-1}\left(x^2-4x-2\right)\left(x=2,x=5\right)$

$12.\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2x+4\left(x=\pm1,x=\frac{-32+3\sqrt{57}}{7}\right)$

$13.\sqrt{5x-1}+1=2x^2+3x+\sqrt[3]{x-9}\left(x=1\right)$

$14.\sqrt{3x+3}-\sqrt{5-2x}-x^3+3x^2+10x-26=0(x=2)$

$15.\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}(x=2)$

BT Mẫu 23: Giải bất phương trình: $\frac{2x^2}{\left(3-\sqrt{9+2x}\right)^2}<x+21\quad(*)$

Đại học Mỏ – Địa Chất năm 1999

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $\begin{cases}9+2x\geq 0\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{9}{2}\leq x\neq 0.$

$$(*)\Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{3-\sqrt{9+2x}}\right)^2<x+21\Leftrightarrow 2\left[\frac{x\left(3+\sqrt{9+2x}\right)}{-2x}\right]^2<x+21$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(3+\sqrt{9+2x}\right)^2}{2}<x+21\Leftrightarrow 9+6\sqrt{9+2x}+9+2x<2x+42$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{9+2x}<4\Leftrightarrow 9+2x<16\Leftrightarrow x<\frac{7}{2}.$$

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của hệ là $x \in \left[-\frac{9}{2};\frac{7}{2}\right) \setminus \{0\}$.

BT Mẫu 24 Giải bất phương trình: $\frac{x^2}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^2} > x-4 \quad (*)$

Đại học Sư Phạm Vinh năm 2001

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $1+x \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$.
- Nếu $\begin{cases} x \geq -1 \\ x-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 4 \Rightarrow (*)$ luôn đúng. Do đó: $x \in [-1;4)$ là một tập nghiệm của bất phương trình $(*)$.
- Khi $x \geq 4$:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ \left[\frac{x\left(1-\sqrt{1+x}\right)}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(1-\sqrt{1+x}\right)}\right]^2 > x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ \left[\frac{x\left(1-\sqrt{1+x}\right)}{1-1-x}\right]^2 > x-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ \left(1-\sqrt{1+x}\right)^2 > x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ 1-2\sqrt{1+x}+1+x > x-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ \sqrt{1+x} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ 1+x<9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x<8 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [4;8).$$

- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left[\begin{array}{l} x \in [-1;4) \\ x \in [4;8) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [-1;8)$.

BT Mẫu 25 :Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3} \geq 2\sqrt{x^2-5x+4} \quad (*)$

Đại học Y Dược năm 2001 – Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh năm 1996

Bài giải tham khảo

Nhận xét: $\begin{cases} \left(x^2-3x+2\right)-\left(x^2-5x+4\right)=2x-2=2(x-1) \\ \left(x^2-4x+3\right)-\left(x^2-5x+4\right)=x-1 \end{cases}$. Nên ta có lời giải sau:

- Điều kiện: $x \leq 1 \ \vee \ x \geq 4$.

$$(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{x^2-5x+4}\right)+\left(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-5x+4}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(x-1\right)}{\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-5x+4}}+\frac{x-1}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-5x+4}}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(\frac{2}{\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-5x+4}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-5x+4}}\right)\geq 0 \quad \left(1\right)$$

- Do $\left[\begin{array}{l} x\leq 1 \\ x\geq 4\end{array}\right.$ thì: $\frac{2}{\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-5x+4}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-5x+4}}>0$

  nên $\left(1\right)\Leftrightarrow x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm bất phương trình là: $x\geq 4 \ \vee \ x=1$.

BT Mẫu 26: Giải bất phương trình: $\frac{4}{\sqrt{x}}+\sqrt{2x+1}\geq\sqrt{2x+17} \quad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $x>0$.

$$\left(*\right)\Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}}\geq\sqrt{2x+17}-\sqrt{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}}\geq\frac{\left(\sqrt{2x+17}-\sqrt{2x+1}\right)\left(\sqrt{2x+17}+\sqrt{2x+1}\right)}{\sqrt{2x+17}+\sqrt{2x+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}}\geq\frac{16}{\sqrt{2x+17}+\sqrt{2x+1}} \qquad \Leftrightarrow \sqrt{2x+17}+\sqrt{2x+1}\geq 4\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+17}+\sqrt{2x+1}\right)^2\geq 16x \qquad \Leftrightarrow \sqrt{\left(2x+17\right)\left(2x+1\right)}\geq 6x-9$$ (dạng $\sqrt{A}\geq B$).

$$\Leftrightarrow \ldots.\ x\in\left(\frac{3}{2};4\right].$$

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x\in\left(0;4\right]$.

BT Mẫu 27 :Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}>2\sqrt{3} \quad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

- Điều kiện: $-2\leq x\leq 4$.

$$\left(*\right)\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-3\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{4-x}\right)>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3+3x^2+6x-11}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}+3\sqrt{3}}+\frac{x-1}{\sqrt{3}+\sqrt{4-x}}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(2x^2+5x+11)}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}+3\sqrt{3}}+\frac{x-1}{\sqrt{3}+\sqrt{4-x}}>0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{63}{8}}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}+3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4-x}}\right]>0$$

$$\Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1.$$

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x \in (1;4]$.

BT Mẫu 28: Giải bất phương trình: $9(x^2+1) \le (3x+7)\left(1-\sqrt{3x+4}\right)^2 \quad (*)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

- Điều kiện: $x \ge -\frac{4}{3}$.

$$(*) \Leftrightarrow 9(x+1)^2\left(1+\sqrt{3x+4}\right)^2 \le (3x+7)\left[\left(1-\sqrt{3x+4}\right)\left(1+\sqrt{3x+4}\right)\right]^2$$

$$\Leftrightarrow 9(x+1)^2\left(1+\sqrt{3x+4}\right)^2 \le 9(3x+7)(x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2\left[\left(1+\sqrt{3x+4}\right)^2-3x-7\right] \le 0 \quad (1)$$

- Khi $x=-1 \Rightarrow (1)$: luôn đúng.

- Khi $\begin{cases} x \ne -1 \\ x \ge -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+4} \le 1 \\ x \ge -\frac{4}{3} \\ x \ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \le x < -1.$

- Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm bất phương trình là $x \in \left[-\frac{4}{3};-1\right]$.

BT Mẫu29: Giải bất phương trình: $2\sqrt{1-\frac{2}{x}}+\sqrt{2x-\frac{8}{x}} \ge x \quad (1)$

<u>Bài giải tham khảo</u>

$$\left(1\right) \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{x-2}{x}}+\sqrt{\frac{2x^2-8}{x}} \ge x \quad \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{x-2}{x}}+\sqrt{\frac{2\left(x-2\right)\left(x+2\right)}{x}} \ge x \quad \left(2\right)$$

- Điều kiện: $\begin{cases} \dfrac{x-2}{x} \ge 0 \\ \dfrac{2\left(x-2\right)\left(x+2\right)}{x} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \le x < 0 \\ x \ge 2 \end{array}\right.$.

- Với: $-2 \le x < 0$: thì $\left(2\right)$ luôn đúng.

- Với: $x \ge 2$: $\left(2\right) \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x-2}{x}}.\left(2+\sqrt{2x+4}\right) \ge x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-2}{x}}.\frac{\left(2+\sqrt{2x+4}\right)\left(2-\sqrt{2x+4}\right)}{2-\sqrt{2x+4}} \ge x \quad \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-2}{x}}.\frac{\left(-4x\right)}{2-\sqrt{2x+4}} \ge x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}}.\frac{4}{\sqrt{2x+4}-2} \ge 1$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x-2} \ge \sqrt{x}\left(\sqrt{2x+4}-2\right), \quad \left(\text{do}: \sqrt{2x+4}-2>0, \ \forall x \ge 2\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x-2} \ge \sqrt{2x^2+4x}-2\sqrt{x} \quad \Leftrightarrow 4\sqrt{x-2}+2\sqrt{x} \ge \sqrt{2x^2+4x}$$

$$\Leftrightarrow 16x-32+4x+16\sqrt{x\left(x-2\right)} \ge 2x^2+4x \quad \Leftrightarrow x^2-2x-4\sqrt{x^2-2x}+4 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2-4\sqrt{x^2-2x}+4 \le 0 \quad \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-2x}-2\right)^2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x}-2=0 \quad \Leftrightarrow x^2-2x-4=0 \quad \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{5}$$

- Do $x \ge 2 \Rightarrow x=1+\sqrt{5}$.

- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left[-2;0\right) \cup \left\{1+\sqrt{5}\right\}$.

BT Mẫu 30 :Giải bất phương trình: $\left(x-1\right)\sqrt{x^2-2x+5}-4x\sqrt{x^2+1} \ge 2\left(x+1\right) \quad \left(*\right)$

Bài giải tham khảo

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(2+\sqrt{x^2-2x+5}\right)+2x\left(2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x+5}\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(2+\sqrt{x^2-2x+5}\right)+\frac{2x\left(x+1\right)\left(3x-1\right)}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left[\left(2+\sqrt{x^2-2x+5}\right)+\frac{2x\left(3x-1\right)}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}\right] \le 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(\frac{4\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2-2x+5}+2\sqrt{(x^2+1)(x^2-2x+5)}+7x^2-4x+5}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}\right)\le 0.$$

Do $7x^2-4x+5=7\left(x-\frac{4}{7}\right)^2+\frac{31}{7}>0$ nên phương trình $\Leftrightarrow x+1\le 0 \Leftrightarrow x\le -1$.

- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $x\in(-\infty;-1]$.

KỸ THUẬT LIÊN HỢP TRUY NGƯỢC DẤU:

Khi gặp một phương trình vô tỷ,ta biết rằng phương trình này có thể giải được bằng phương pháp liên hợp,dùng MODE 7 ta cũng biết rằng phương trình này chỉ có đúng một nghiệm - Nhưng sau khi liên hợp xong biểu thức còn lại rất cồng kềnh phức tạp và khó chứng minh phương trình này vô nghiệm lúc đó ta sẽ làm gì.Tất cả sẽ có trong bài viết này với những phân tích bình luận đơn giản thông qua 20 ví dụ.Hi vọng rằng đó sẽ là sức mạnh giúp các em giải quyết triệt để lớp bài toán này.

BT Mẫu 31 Giải phương trình: $2x^2-5x-1=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\,(*)$

Nhận xét: Dùng máy tính ta kiểm tra được phương trình này có một nghiệm duy nhất x = 3,thay nghiệm đó vào $\sqrt{x-2}=1;\sqrt{4-x}=1$ nhưn vậy thông thường ta sẽ liên hợp như sau:

$$\begin{cases}1-\sqrt{x-2}=\dfrac{-(x-3)}{1+\sqrt{x-2}}(1)\\ 1-\sqrt{4-x}=\dfrac{x-3}{1+\sqrt{4-x}}(2)\end{cases}$$ …………ta nhận thấy sự không đồng nhất về dấu???

Tới đây một cách tự nhiên ta đi tìm ý tưởng để cả hai cùng mang dấu "+" hoặc cùng "- " ở đây tôi sẽ truy ngược dấu cho (1) cụ thể như sau:

ĐK $2\le x\le 4$

$$(*)\Leftrightarrow\left(1-\sqrt{4-x}\right)+\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x-2}-1\right)+2x^2-6x=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-3}{1+\sqrt{4-x}}+\frac{(x-3)\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}}+2x(x-3)=0\Leftrightarrow(x-3)\left[\frac{1}{1+\sqrt{4-x}}+\frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}}+2x\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ \dfrac{1}{1+\sqrt{4-x}}+\dfrac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}}+2x>0;\forall x\in[2;4]\end{array}\right.$$

Tới đây các em đã hình dung được phần nào lợi thế của phương pháp rồi chứ,kết quả thu được thật tuyệt vời đúng không các em - tiếp tục cùng thầy qua các ví dụ khác nhé…..

BT Mẫu 32Giải phương trình: $4x+1=\sqrt{2-x}+2\sqrt{3x+1}\,(*)$

Nhận xét: dùng máy tính ta biết được x = 1 là nghiệm duy nhất của phương trình,cũng lần lượt thay nghiệm đó vào các căn ta có biểu thức lieenh hợp thông thường như sau:

$$\begin{cases} 1-\sqrt{2-x}=\dfrac{x-1}{1+\sqrt{2-x}}(1) \\ 2-\sqrt{3x+1}=\dfrac{-3(x-1)}{2+\sqrt{3x+1}}(2) \end{cases}$$ rõ ràng trái dấu,ta sẽ truy ngược dấu ở (2) như sau

Bài Giải:

ĐK $-\frac{1}{3}\le x\le 2$

$$(*)\Leftrightarrow\left(1-\sqrt{2-x}\right)+\sqrt{3x+1}\left(\sqrt{3x+1}-2\right)+x-1=0\Leftrightarrow\frac{x-1}{1+\sqrt{2-x}}+\sqrt{3x+1}\frac{3(x-1)}{2+\sqrt{3x+1}}+x-1=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left[\frac{1}{1+\sqrt{2-x}}+\frac{3\sqrt{3x+1}}{2+\sqrt{3x+1}}+1\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ \dfrac{1}{1+\sqrt{2-x}}+\dfrac{3\sqrt{3x+1}}{2+\sqrt{3x+1}}+1=0(3) \end{array}\right.$$

(3) luôn dương nên vô nghiệm,vậy x = 1 là nghiệm duy nhất

BT Mẫu 33 : Giải phương trình $x^2+4x=2\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x-1}(*)$

Nhận xét: Dùng casio ta biết phương trình có nghiệm duy nhất x =1 giống như bài trên ta sẽ truy ngược dấu tuy nhiên bài này ta sẽ truy ngược cả hai biểu thức liên hợp,ta có lời giải như sau:

ĐK x $\ge \frac{1}{2}$

$$\sqrt{3x+1}\left(\sqrt{3x+1}-2\right)+\sqrt{2x-1}\left(\sqrt{2x-1}-1\right)+x^2-x=0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{3x+1}\frac{x-1}{\sqrt{3x+1}+2}+2\sqrt{2x-1}\frac{x-1}{\sqrt{2x-1}+1}+x(x-1)=0\Leftrightarrow(x-1)\left[\frac{3\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{2\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}+1}+x\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ \dfrac{3\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+2}+\dfrac{2\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}+1}+x=0(1) \end{array}\right.$$ phương trình (1) luôn dương trên Đk do đó x = 1 là !

BT Mẫu 34 : Giải phương trình $\left(x^2+1\right)(x-1)+2\sqrt{5-x}+\sqrt[3]{2x-1}=5(*)$

ĐK: x ≤ 5 ,Nhẩm được x = 1 là nghiệm duy nhất của phương trình và $\sqrt{5-x}-2=\dfrac{1-x}{\sqrt{5-x}+2}<0$

Do vậy ta tiến hành truy ngược dấu biểu thức này, viết lại phương trình như sau:

$$\left(x^2+1\right)(x-1)+\sqrt{5-x}\left(2-\sqrt{5-x}\right)+(\sqrt[3]{2x-1}-1)+1-\mathrm{x}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+1\right)(x-1)+\sqrt{5-x}.\frac{x-1}{2+\sqrt{5-x}}+\frac{2(x-1)}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}+1}+1-x=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[x^2+\frac{\sqrt{5-x}}{2+\sqrt{5-x}}+\frac{2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}+1}\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2+\dfrac{\sqrt{5-x}}{2+\sqrt{5-x}}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}+1}=0(1) \end{array}\right.$$

(1) luôn dương trên tập nên nó vô nghiệm,vậy x = 1 là nghiệm duy nhất của phương trình.

BT Mẫu 35 : Giải phương trình $10x+2=\sqrt{4x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\,(*)$

Nhận xét:Dùng casio ta biết rằng cả hai phương trình chỉ có một nghiệm x = 0,thay hai nghiệm vào hai căn được kết quả đều bằng 1,nhưng khi liên hợp thông thường thì cả hai sẽ bị mang dấu trái dấu so với phần còn lại.Do đó ta sẽ truy ngược dấu ở cả hai biểu thức trên.Ta có lời giải

ĐK: $x \geq -\frac{1}{4}$

Viết lại pt: $10x+2-\sqrt{4x+1}-\sqrt[3]{3x+1}=0 \Leftrightarrow \sqrt{4x+1}\left(\sqrt{4x+1}-1\right)+\sqrt[3]{3x+1}\left(\sqrt[3]{(3x+1)^2}-1\right)+3x=0$

$$\Leftrightarrow \frac{4x\sqrt{4x+1}}{\sqrt{4x+1}+1}+\frac{(3x+2)3x.\sqrt[3]{3x+2}}{\sqrt[3]{(3x+2)^4}+\sqrt[3]{(3x+2)^2}+1}+3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \dfrac{4\sqrt{4x+1}}{\sqrt{4x+1}+1}+\dfrac{(3x+2)\sqrt[3]{3x+2}}{\sqrt[3]{(3x+1)^4}+\sqrt[3]{(3x+1)^2}+1}+3=0(1) \end{array}\right.$$

(1) luôn dương nên phương trình đã cho chỉ có nghiệm duy nhất x = 0

Điểm nhấn ở bài toán này nằm ở chỗ nào các em thấy chưa???Đó chính là kỹ năng truy ngược dấu cho một hàm căn bậc 3 như thế nào - ta sẽ cùng nhau tới bài mẫu sau đây nhé:

BT Mẫu 36 : Giải phương trình sau $x^2+3x-8-\sqrt{2x-3}=\sqrt[3]{x-1}\,(*)$

ĐK : x ≥ $\frac{3}{2}$

Dùng Casio biết được x = 2 là nghiệm duy nhất của phương trình,thay vào hai căn cho kết quả = 1

PT (*) $\Leftrightarrow x^2+3x-8-\sqrt{2x-3}-\sqrt[3]{x-1}=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-3}\left(\sqrt{2x-3}-1\right)+\sqrt[3]{x-1}\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}-1\right)+x^2-4=0$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-2)\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x+3}+1}+\frac{x(x-2)}{\sqrt[3]{(x-1)^4}+\sqrt[3]{(x-1)^2}+1}+(x-2)(x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \dfrac{2\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1}+\dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-1)^4}+\sqrt[3]{(x-1)^2}+1}+x+2=0(1) \end{array}\right.$$ Với $\forall x \geq \frac{3}{2}$ thì (1) luôn dương,pt có nghiệm x = 2 là duy nhất

BT Mẫu 37: Giải phương trình $x^2+4x+1-2\sqrt[3]{3x+5}=\sqrt{3x+1}\,(*)$

ĐK: x $\geq -1/3$

Nhận xét: Máy tính cho ta biết x = 1 là nghiệm duy nhất của phương trình,ta có lời giải sau đây.

$$(*)\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}\left(\sqrt{3x+1}-2\right)+\sqrt[3]{3x+5}\left(\sqrt[3]{(3x+5)^2}-4\right)+2x^2+2x-4=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-1)\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{\sqrt[3]{3x+5}\left[(3x+5)^2-64\right]}{\sqrt[3]{(3x+5)^4}+\sqrt[3]{64(3x+5)^2}+64^2}+2(x-1)(x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{3\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{(3x+13)\sqrt[3]{3x+5}}{\sqrt[3]{(3x+5)^4}+\sqrt[3]{64(3x+5)^2}+64^2}+2(x+2)\right]=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ \dfrac{3\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+2}+\dfrac{(3x+13)\sqrt[3]{3x+5}}{\sqrt[3]{(3x+5)^4}+\sqrt[3]{64(3x+5)^2}+64^2}+2(x+2)=0(1) \end{array}\right.$$

do (1) luôn dương nên pt chỉ có một nghiệm duy nhất x = 1 khi đọc bài này độc giả sẽ thắc mắc tại sao $\sqrt[3]{(3x+5)^2}$ lại liên hợp với 4 mà không phải là 2 ,bởi vì ở đây là $\sqrt[3]{(3x+5)^2}$ chứ không phải là $\sqrt[3]{3x+5}$ .Thêm một điều nữa trong quá trình giải trước khi đưa ra biểu thức liên hợp để đảm bảo tính cân bằng hệ số tôi đã nhân cả hai vế của phương trình này cho 2.

BT Mẫu 38Giải phương trình sau : $5x+3-(x+1)\left(2\sqrt{x^2+3}-x^2\right)-\sqrt[3]{3x^2+5}=0\,(*)$

TXĐ : D = R

$$(*)\Leftrightarrow 5x+3+(x+1)x^2-2(x+1)\sqrt{x^2+3}-\sqrt[3]{3x^2+5}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x^2+3}\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)+\left(x+1-\sqrt[3]{3x^2+5}\right)+x-1=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x^2+3}\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+3}+2}+\frac{(x+1)^3-(3x^2+5)}{(x+1)^2+\sqrt[3]{(x+1)^3(3x^2+5)}+\sqrt[3]{(3x^2+5)^2}}+x+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{(x+1)^2\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}+2}+\frac{x^2+x+4}{(x+1)^2+\sqrt[3]{(x+1)^3(3x^2+5)}+\sqrt[3]{3x^2+5}}+1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)=0\vee\left[\frac{(x+1)^2\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}+2}+\frac{x^2+x+4}{(x+1)^2+\sqrt[3]{(x+1)^3(3x^2+5)}+\sqrt[3]{3x^2+5}}+1\right]=0$$

Vậy phương trình chỉ có đúng một nghiệm x = 1

Điều gì làm bạn thấy khó hiểu nhất??? có lẽ là việc xuất hiện của biểu thức liên hợp $\left(x+1-\sqrt[3]{3x^2+5}\right)$ *tại sao không phải là số 2, vì khi liên hợp với số 2 du đã truy ngược dấu nhưng kết quả liên hợp vẫn bất lợi trong việc chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất do đó ta giả thiết có ax + b nào đó thỏa mãn mà 2 = 1 + 1 = x + 1(vì x = 1 là nghiệm mà).vậy ta có kết quả bài toán trên khá thành công!!!*

BT Mẫu 40: Giải phương trình $2x^3+x^2+x-1-x\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt[3]{2x+2}=0(*)$

Bài giải

$$(*)\Leftrightarrow x\sqrt{2x^2+x+1}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-1\right)+\sqrt[3]{2x+2}-1=0\Leftrightarrow(2x+1)\left[\frac{x^2\sqrt{2x^2+x+1}}{\sqrt{2x^2+x+1}+1}+\frac{1}{\sqrt[3]{(2x+2)^2}+\sqrt[3]{2x+2}+1}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{x^2\sqrt{2x^2+x+1}}{\sqrt{2x^2+x+1}+1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{(2x+2)^2}+\sqrt[3]{2x+2}+1}=0(VN)\end{array}\right.$$

vậy pt có nghiệm duy nhất x = -1/2

BT Mẫu 41: Giải Phương trình $3x-4+\sqrt{2x+3}=(1-x)\left(x^2-2\sqrt{x^2+3}\right)(*)$

ĐK $x\geq-3/2$

Dùng casio ta biết rằng pt chỉ có một nghiệm là x = -1,biểu thức cần truy ngược dấu chính là $(1-x)\sqrt{x^2+3}$ vì (1-x) chưa xác định về dấu,khi đó ta có ý tưởng làm xuất hiện x + 1 và $(1-x)^2$ Ta có lời giải như sau:

$$(*)\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x+3}-1\right)+(1-x)\sqrt{x^2+3}\left(2-\sqrt{x^2+3}\right)=0\Leftrightarrow\frac{2(x+1)}{\sqrt{2x+3}+1}+\frac{(1-x)^2(1+x)\sqrt{x^2+3}}{2+\sqrt{x^2+3}}=0$$

$$\Leftrightarrow(x+1)\left[\frac{2}{\sqrt{2x+3}+1}+\frac{(1-x)^2\sqrt{x^2+3}}{2+\sqrt{x^2+3}}\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ \dfrac{2}{\sqrt{2x+3}+1}+\dfrac{(1-x)^2\sqrt{x^2+3}}{2+\sqrt{x^2+3}}=0(1)\end{array}\right.$$

Thấy ngay (1) vô nghiệm vì (1) luôn >0 vậy pt chỉ có một nghiệm x = -1

Qua một số ví dụ vừa rồi ta thấy rằng có những biểu thức ta cần truy ngược để xác định cụ thể dấu của các biểu thức đứng ngay phía trước căn thức,điều này cần chú ý khi làm bài

BT Mẫu 42:Giải phương trình: $x^3-5x^2+13x-6=(x-2)\sqrt{x^2-3x+3}+2\sqrt{3x+1}(*)$

Nhận xét: Bài này giống với bài trên ta cần truy ngược để được $(x-2)^2$,đồng thời khi liên hợp $\sqrt{3x+1}$ với số 2 ta cũng thu được kết quả (-) do đó cũng cần truy ngược dấu.Dùng casio biết được x = 1 là nghiệm duy nhất của phương trình thay vào $\sqrt{x^2-3x+3}=1,\sqrt{3x+1}=2$ (Các em chú ý luôn dựa vào nghiệm để tìm biểu thức liên hợp nhé)

Ta có lời giải: ĐK: x $\geq-1/3$

$$(*)\Leftrightarrow x^3-5x^2+13x-6-(x-2)\sqrt{x^2-3x+3}-2\sqrt{3x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-2)\sqrt{x^2-3x+3}\left(\sqrt{x^2-3x+3}-1\right)+\sqrt{3x+1}\left(\sqrt{3x+1}-2\right)+x-1=0$$

$$\Leftrightarrow(x-2)\sqrt{x^2-3x+3}\frac{\left(x^2-3x+2\right)}{\sqrt{x^2-3x+3}+1}+\frac{3(x-1)\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+2}+x-1=0$$

$$(x-1)\left[\frac{(x-2)^2\sqrt{x^2-3x+3}}{\sqrt{x^2-3x+3}+1}+\frac{3\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+2}+1\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ \frac{(x-2)^2\sqrt{x^2-3x+3}}{\sqrt{x^2-3x+3}+1}+\frac{3\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+2}+1=0(1)\end{array}\right.$$

(1) luôn (+) nên phương trình chỉ có đúng một nghiệm x = 1

BT Mẫu 43: Giải phương trình sau $x^2+14x+14=(x+1)\sqrt{4x+5}+2(x+5)\sqrt{x+3}\,(*)$

Nhận xét: phương trình có nghiệm duy nhất x = 1,ta thấy ngay bài này cần truy ngược cả hai biểu thức liên hợp vì một biểu thức chưa (x + 1) chưa rõ về dấu,một biểu thức khi liên hợp cho dấu âm.Thay x = 1 vào $\sqrt{4x+5}=3;\sqrt{x+3}=2$ nhưng khi truy ngược biểu thức

$(x+1)\sqrt{4x+5}\left(\sqrt{4x+5}-3\right)=\frac{4(x+1)\sqrt{4x+5}(x-1)}{\sqrt{4x+5}+3}$ rõ ràng không làm xuất hiện $(x+1)^2$ .....Vậy ta sẽ làm thế nào??? Có thể biểu thức liên hợp sẽ là một hàm bậc nhất chăng? Thế thì hệ số bất định lên tiếng thôi

Nhắc lại ta cần truy ngược để làm xuất hiện $(x+1)^2(x-1)$,giả sử ta có

$ax+b=\sqrt{4x+5}$,thay x = 1 vào ta được a + b = 3 còn đâu một phương trình nữa???ta cần xuất hiện $(x+1)^2$ vậy thay x = -1 vào ta có -a + b = 1 vậy a = 1 ,b = 2(Các em có thể đoán nhanh biểu thức la x + 2 vì ta có x = 1 là nghiệm mà thay x = 1 vào $\sqrt{4x+5}=3$ = x + 2) tới đây coi như đã xong phần phân tích ,làm thôi!!!!

ĐK x $\geq -5/4$

$$(*)\Leftrightarrow(x+1)\left(x+2-\sqrt{4x+5}\right)+(x+5)\sqrt{x+3}\left(\sqrt{x+3}-2\right)+3x-3$$

$$\Leftrightarrow(x+1)\frac{(x^2-1)}{x+2+\sqrt{4x+5}}+(x+5)\sqrt{x+3}\frac{(x-1)}{\sqrt{x+3}+2}+3(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left[\frac{(x+1)^2}{x+2+\sqrt{4x+5}}+\frac{(x+5)\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}+2}+3\right]=0$$

$\Leftrightarrow(x-1)=0\vee\left[\frac{(x+1)^2}{x+2+\sqrt{4x+5}}+\frac{(x+5)\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}+2}+3\right]=0(1)$ ta thấy (1) luôn dương nên vô nghiệm

BT Mẫu 44: Giải phương trình sau: $5x^2+(3x+1)\sqrt{2-x}-3(x-13)\sqrt{2x-1}=7x+28(*)$

ĐK: $1/2\leq x\leq 2$ cũng giống bài trên (x - 13) chưa xác định về dấu với đk của x do đó ta cần làm xuất hiện $(x-13)^2(x-1)$ với x = 1 là nghiệm duy nhất của pt ta đã nhẩm được,kiểm tra liên hợp thông thường hoặc truy ngược dấu với việc thay x = 1 vào $\sqrt{2x-1}=1$ ta không thu được kết quả mong đợi,khi đó hệ số bất định với sức mạnh kinh khủng sẽ giúp bạn!!!

Giả sử biểu thức cần liên hợp là ax + b ta tìm a,b sao cho ax + b = $\sqrt{2x-1}$ thay lần lượt x = 1 và x = 13 vào ta thu được a = 1/3 ; b = 2/3.Lúc đó ta có:

$$(*)\Leftrightarrow(3x+1)\sqrt{2-x}\left(1-\sqrt{2-x}\right)+(x-13)\left(x+2-3\sqrt{2x-1}\right)+x^2-x=0$$

$$\Leftrightarrow(3x+1)\sqrt{2-x}\frac{x-1}{1+\sqrt{2-x}}+\frac{(x-13)^2(x-1)}{x+2+3\sqrt{2x-1}}+x(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left[\frac{(3x+1)\sqrt{2-x}}{1+\sqrt{2-x}}+\frac{(x-13)^2}{x+2+3\sqrt{2x-1}}+x\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ \frac{(3x+1)\sqrt{2-x}}{1+\sqrt{2-x}}+\frac{(x-13)^2}{x+2+3\sqrt{2x-1}}+x=0(1)\end{array}\right.$$

Rõ ràng x = 1 là nghiệm duy nhất của phương trình vì (1) luôn dương trên tập xác định

BT Mẫu 45: Giải phương trình: $2(8x^2+7x+1)=(x+1)\sqrt{2x+3}+2(3x+1)\sqrt{4x+2}\,(*)$

ĐK $x \ge -1/2$

Nhận xét: (3x+1) chưa xác định dấu ta suy nghĩ tới hướng làm như bài trên,giả sử biểu thức cần liên hợp với $\sqrt{4x+2}$ là ax + b,tìm a và b sao cho ax + b = $\sqrt{4x+2}$,thay x = ½ (nghiệm đã nhẩm được) ta có a + 2b = 4 nhưng khi thay x = -1/3 vào thì cho số quá xấu,phải làm sao đây??? Thôi thì ta chọn a,b phù hợp với phương trình a + 2b = 4 vậy, chọn a = 2,b = 1

Nhân 2 vế của (*) cho 2 ta có pt mới như sau:

$$(*) \Leftrightarrow 4\left(8x^2+7x+1\right)-2(x+1)\sqrt{2x+3}-4(3x+1)\sqrt{4x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{2x+3}\left(\sqrt{2x+3}-2\right)+4(3x+1)\left(2x+1-\sqrt{4x+2}\right)+6x^2+3x-3=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{2x+3}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2x+3}+2}\right)+4(3x+1)\left(\frac{4x^2-1}{2x+1+\sqrt{4x+2}}\right)+(2x-1)(3x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\left[\frac{(x+1)\sqrt{2x+3}}{\sqrt{2x+3}+2}+\frac{4\left(6x^2+5x+1\right)}{2x+1+\sqrt{4x+2}}+3x+3\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{(x+1)\sqrt{2x+3}}{\sqrt{2x+3}+2}+\dfrac{4\left[6\left(x+\dfrac{5}{12}\right)^2+\dfrac{1}{24}\right]}{2x+1+\sqrt{4x+2}}+3x+3=0(1) \end{array}\right.$$

do (1) luôn dương nên x = ½ là nghiệm duy nhất

BT Mẫu 46: Giải phương trình sau $(8x+13)\sqrt{4x+17}=12x+35+2(x+2)\sqrt{2x+3}\,(*)$

ĐK $x \ge -3/2$

Đặt t = $\sqrt{2x+3}(t\ge 0)\rightarrow x=\dfrac{t^2-3}{2}$ thay vào phương trình (*) ta có:

(*) $\Leftrightarrow t^3+6t^2+t+17-\left(4t^2+1\right)\sqrt{2t^2+1}=0(1)$ nhẩm thấy t = 2 là nghiệm của phương trình,ta giả sử biểu thức liên hợp là at + b ,phải tìm a và b để at + b = $\sqrt{2t^2+1}$,với t = 2 ta có 2a + b = 3,việc tìm thêm một pt nữa lại gặp khó khăn vì $4t^2+1=0$ vô nghiệm.Ta chọn cặp a,b phù hợp là a = 1,b=1.

$$(1)\Leftrightarrow t^3+6t^2+t+17+\left(4t^2+1\right)\left[t+1-\sqrt{2t^2+1}\right]-\left(4t^2+1\right)(t+1)=0$$

$$\Leftrightarrow -3t^3+2t^2+16+\left(4t^2+1\right)\left[\frac{-t^2+2t}{t+1+\sqrt{2t^2+1}}\right]=0\Leftrightarrow (t-2)\left(-3t^2-4t-8\right)-\frac{t\left(4t^2+1\right)(t-2)}{t+1+\sqrt{2t^2+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ -3t^2-4t-8-\dfrac{t\left(4t^2+1\right)}{t+1+\sqrt{2t^2+1}}=0(2) \end{array}\right.$$

PT chỉ có một nghiệm t = 2 vì (2) luôn dương với $\forall t\ge 0$

BT Mẫu 47: Giải phương trình $4x+12=(3x+8)\sqrt{x+6}-(4x+13)\sqrt{x+2}\,(*)$

Lời giải:

Đặt t = $\sqrt{x+2},t\ge 0\rightarrow x=t^2-2$ thay vào (*) ta có

$$(*)\Leftrightarrow 4t^3+4t^2+5t+4-\left(3t^2+2\right)\sqrt{t^2+4}=0$$

$$\Leftrightarrow t^3-2t^2+3t+\left(3t^2+2\right)(t+2)\left(t+2-\sqrt{t^2+4}\right)=0\Leftrightarrow t\left[t^2-2t+3+\left(3t^2+2\right)(t+2)\frac{4}{t+2+\sqrt{t^2+4}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow t=0\vee\left[t^2-2t+3+\left(3t^2+2\right)\left(t+2\right)\frac{4}{t+2+\sqrt{t^2+4}}\right]=0(1)$$

(1) vô nghiệm vì luôn dương,pt có nghiệm duy nhất t = 0 hay x = -2

Qua hai ví dụ trên có lẽ bạn đọc đang thắc mắc vì sao lại phải dùng tới ẩn phụ - Lí do là do bậc của x ở biểu thức không chứa căn thấp hơn so với bậc của x ở biểu thức chứa căn nên ta dùng ẩn phụ để hóa giải bài toán này.

Tới đây có lẽ tác giả cùng xin dừng bài viết của mình ở đây,với các kỹ thuật đã được nêu ra và các ví dụ được phân tích và nhận xét một cách khá tỷ mỉ,lối trình bày định hướng tuy duy cho mỗi lời giải cũng khá rõ ràng hy vọng rằng bài viết sẽ là một hành trang bổ trợ cho các em một công cụ « mạnh mẽ » trong việc chinh phục những bài toán về phương trình chứa căn.Trong bài viết tiếp theo tác giả sẽ trình bày một vài công cụ « mạnh mẽ » khác giúp các em công phá đề thi quốc gia một cách nhẹ nhàng hơn nữa.Xin chân thành cám ơn các bạn đã sử dụng tài liệu này.mọi góp ý tác giả xin ghi nhận